**Лекция 10.**

*Движение точки в центральном поле сил*

Движение механической системы, состоящей из одной точки M с массой m, определяется действующей на нее внешней силой, а также ее начальным положением и скоростью. Если уравнение Ньютона автономно (), то в каждый момент времени t сила однозначно определяется положением точки M. Вектор функция – *силовое поле*, а точка M движется в *поле сил* .

*Центральное поле си*л в D∈E3 – такое поле, что при существовании точки O (центр сил) и материальной точки единичной массы, находящейся в D, действует сила, направленная вдоль прямой, проходящей через точки O и M. Уравнение Ньютона для движения данной точки в центральном поле сил: , где , , .

*Уравнения Ньютона для:*

* *Двух гравитирующих точек*

Рассмотрим инерциальную систему координат с началом O и две материальные точки M и M0, с массами m и m0. Обозначим: , , , , . Используя второй закон Ньютона и закон всемирного тяготения, получаем: , ( - всемирная гравитационная постоянная). Вычитая первое уравнение из второго, получаем уравнения движения точки M в центральном силовом поле с центром в M0: .

* Для двух электрических зарядов

Рассмотрим инерциальную систему координат с началом O и две материальные точки M и M0, с массами m и m0 и зарядами q и q0 соответственно. Введём: , , , , . Используя второй закон Ньютона и закон Кулона, получаем: , (). Вычитая первое уравнение из второго, получаем уравнения движения точки M в центральном силовом поле с центром в M0: (минус в соответствует случаю притягивающихся точек).

* *Для точки в поле силы Гука*

Рассмотрим движение материальной точки M массы m относительно системы координат с началом O под действием силы Гука ( – зависящая от контекста задачи постоянная). Используя второй закон Ньютона и формулу для силы Гука, получаем уравнение движения точки M в центральном силовом поле с центром силы в точке равновесия O:.

При движении материальной точки в центральном поле, главный момент внешних сил относительно центра сил O равен нулю. Следовательно: . - интегралом площадей, – постоянные площадей. Если x, y, z — координаты радиус-вектора , то данное уравнение можно переписать: , . Умножив эти равенства на x, y, z и сложив их, получаем плоскость Лапласа: .  
Следовательно, если , то движение точки происходит в плоскости Лапласа, проходящей через центр сил O.

Геометрическая интерпретация интеграла площадей, говорит о том, что в задаче о движении материальной точки в центральном поле сил наличие этого интеграла является обобщением закона Кеплера о постоянстве секторной скорости планеты.

Если - радиус-вектор точки M(t) в момент t > t0 , то ее *секторная скорость* – вектор , S(t) — площадь фигуры, лежащей в плоскости Лапласа, между векторами и и дугой траектории этой точки. Вектор (ортагонален плоскости Лапласа)  
**Теорема:** Пусть материальная точка M(t) массы m движется в центральном поле сил с центром сил O ∈ E3 и - радиус-вектор этой точки. Если - секторная скорость точки M(t), то: , где - постоянная площадей.

*Изменение кинетического момента, вычисляемого относительно подвижного полюса*

Помня вышеописанные определения, введём новые: радиус-вектор центра масс системы - , , главный вектор ее количества движения - , радиус вектор точки A - , скорость точки A - , ускорение точки A - , A∈E3 – движется относительно некоторого репера с началом в O, главным моментом внешних сил - и главный момент количества движения - механической системы относительно подвижного полюса A.

**Теорема об изменении кинетического момента:** Производная кинетического момента механической системы относительно подвижного полюса A и ее главный момент внешних сил относительно того же полюса связаны равенством: .

**Следствие:** Если при любом t полюс A = A(t) совпадает с центром масс системы или движется прямолинейно и равномерно, то

*Работа силы и изменение кинетической энергии материальной точки*

Рассмотрим уравнение движения в E3 материальной точки M массы m, на которую действует сила : .

Умножив скалярно данное уравнение на , получим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в дифференциальной форме: . Это уравнение записано в терминах бесконечно малых величин, но можно получить его в терминах относительно конечных величин, умножив скалярно на или разделив на : .

A - *работа по перемещению материальной точки* под действием силы из точки M0 в точку M вдоль дуги , где , , t > t0: , где . Обозначая символами X, Y, Z координаты вектора , получим:

Если задать дугу в параметрической форме, то работу можно записать как определенный интеграл по параметру (обычно используется время t или естественная координата s): , где , .

Мощность - . Используя получаем, что *производная кинетической энергии материальной точки равна мощности работы, выполняемой главным вектором сил, действующих на эту точку.*